

**EPFL**

Enseignant: Mathieu Huruguen

Algèbre Linéaire - CMS

16 juin 2022

Durée : 105 minutes

X

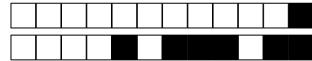
Contrôle 4 (Enoncé)

SCIPER: **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera:
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
<input checked="" type="checkbox"/>		



Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

On donne, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \rightarrow ((5\alpha - \alpha^2)x + (\alpha - 2)y + 7z, (\alpha^2 + \alpha)y + (\alpha + 1)z, (-\alpha^2 - 3\alpha)z).$$

Pour combien de valeur(s) de α est-ce que ...

Question 1 (*3 points*) ... f n'est pas diagonalisable ?

3

0

2

1

Question 2 (*2 points*) ... f n'est pas diagonalisable par blocs ?

2

1

3

0

**Enoncé**

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4 on donne :

$$V = \{P(X) \in \mathbb{R}_4[X] \mid P'(-1) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de V . On note $\deg P(X)$ le degré du polynôme $P(X)$.

Question 3 (2 points) Le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}_4[X]$:

$$W = \{P(X) \in \mathbb{R}_4[X] \mid \deg P(X) \leq 2 \text{ et } P(X)^2 \in V\} \dots$$

- ... est stable par multiplication scalaire mais pas par addition
- ... n'est stable ni par multiplication scalaire ni par addition
- ... est stable par addition et par multiplication scalaire
- ... est stable par addition mais pas par multiplication scalaire

Question 4 (2 points) Parmi les familles de polynômes suivantes, laquelle est génératrice de V ?

- $(X^2 - 1)(X + 1), (X + 1)^2, X^3 - X^2 - 5X - 3, (X + 1)^3, (X + 1)^4$
- $1, X + 1, (X + 1)^2, (X + 1)^3, (X + 1)^4$
- $1, X, X^2, X^3, X^4$
- $X^2 + 2X, X^3 - 3X - 2, (X + 1)^2, (X + 1)^3, X^4 + 4X + 3$



Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 5: *Cette question est notée sur 5 points.*

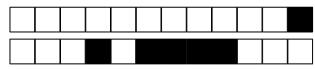
<input type="checkbox"/>	,5									
<input type="checkbox"/> 0		<input type="checkbox"/> 1		<input type="checkbox"/> 2		<input type="checkbox"/> 3		<input type="checkbox"/> 4		<input type="checkbox"/> 5

On considère la projection :

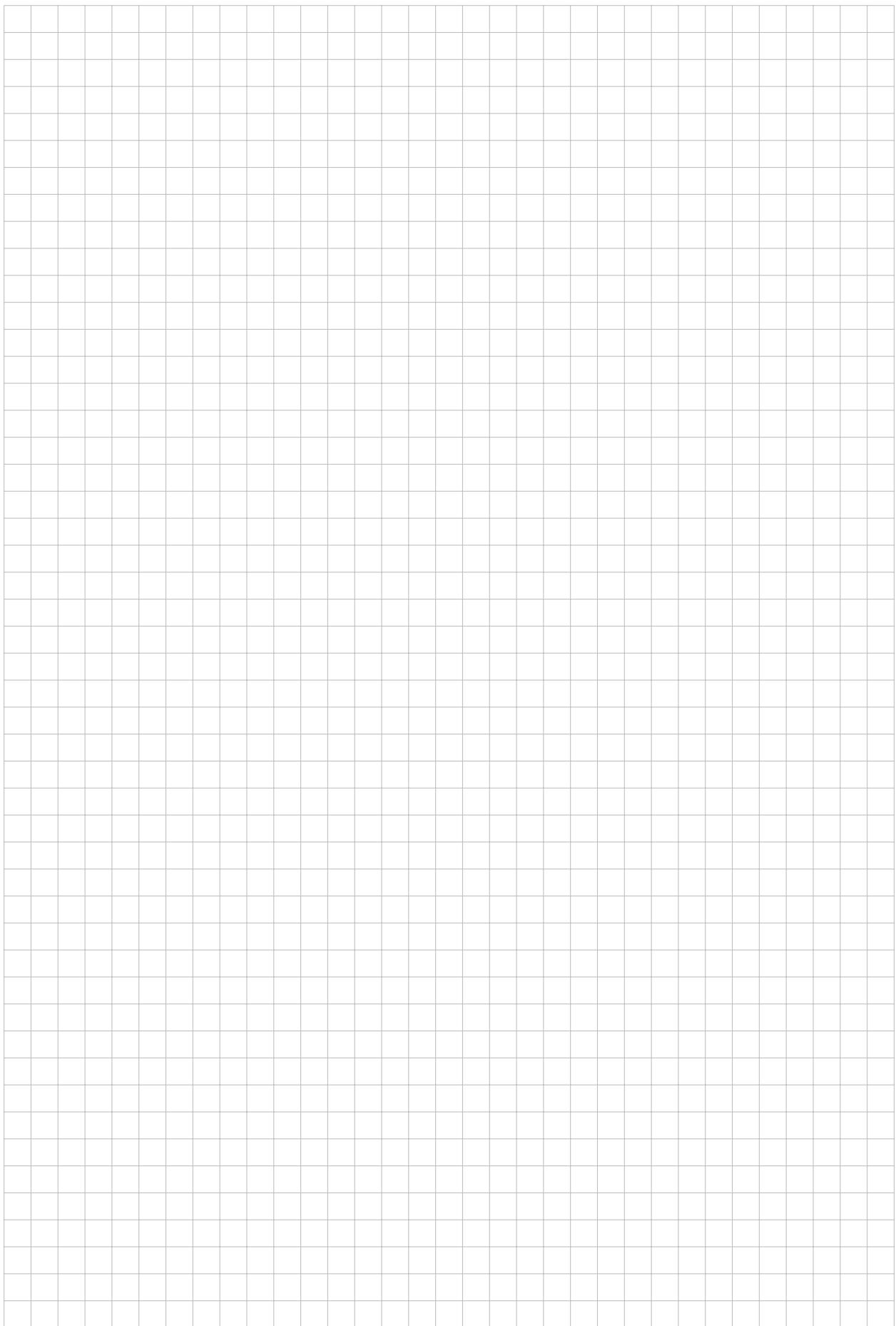
$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

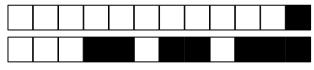
sur le plan vectoriel d'équation $x - y + 3z = 0$ parallèlement à la droite vectorielle engendrée par $(2, 1, 1)$.

- (a) Déterminer l'expression de $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z .
- (b) Trouver l'équation d'un plan vectoriel contenant $(3, -1, 4)$ et qui est stable par f .

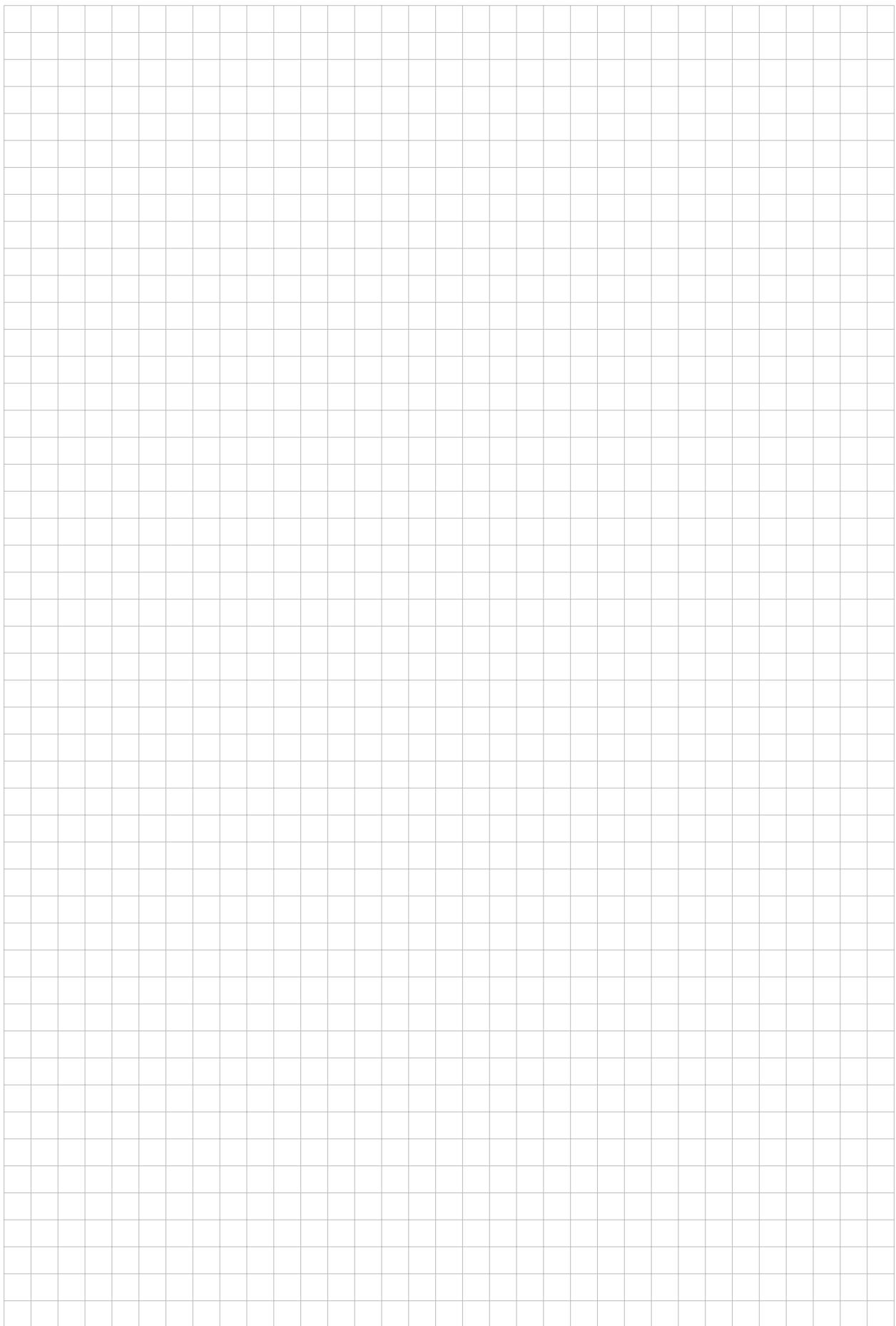


+1/5/56+



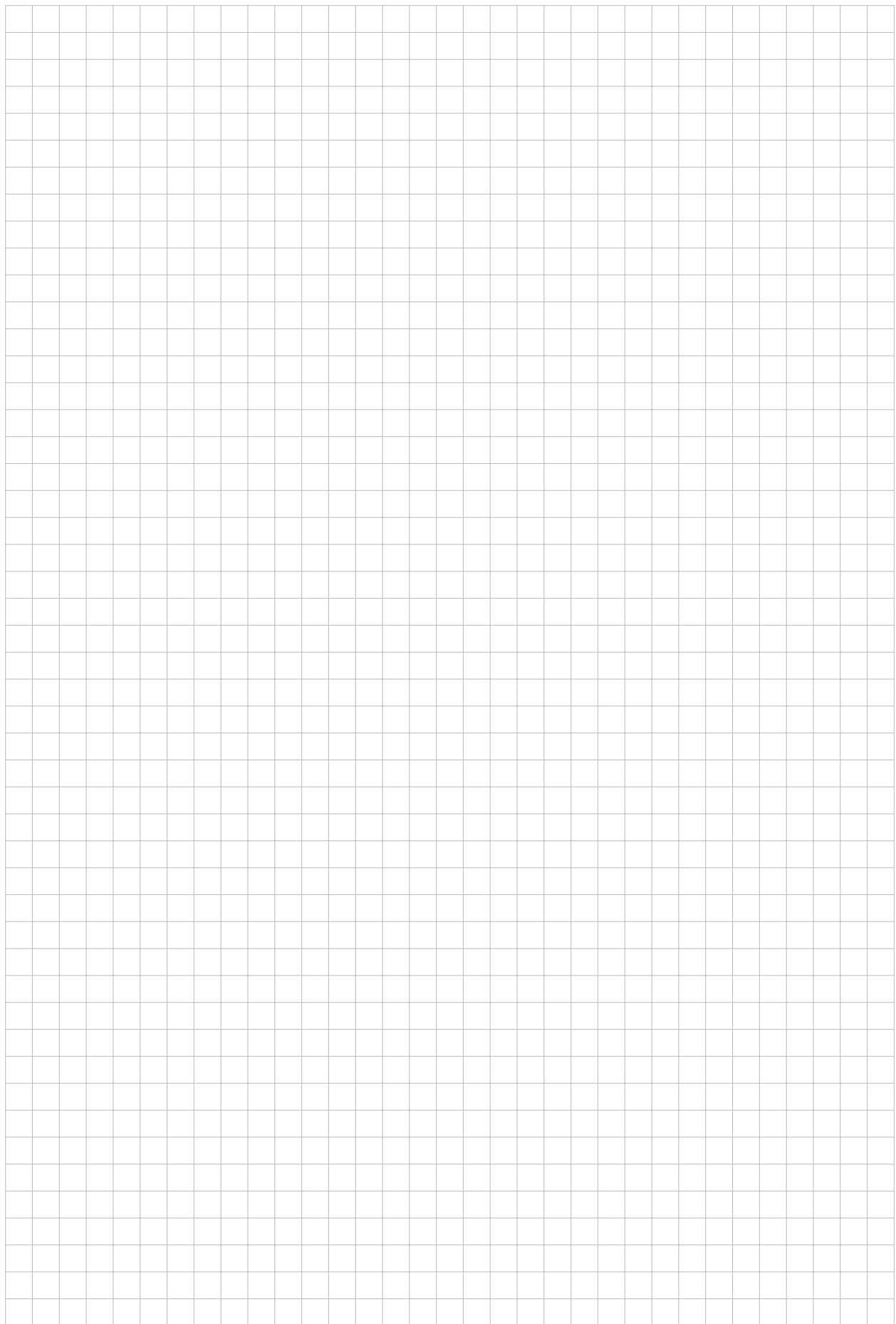


+1/6/55+





+1/7/54+





Question 6: Cette question est notée sur 8 points.

$$\begin{array}{ccccccccc} & \boxed{}.5 & \boxed{}.5 & \boxed{}.5 & \boxed{}.5 & \boxed{}.5 & & \\ \boxed{}_0 & \boxed{}_1 & \boxed{}_2 & \boxed{}_3 & \boxed{}_4 & \boxed{}_5 & \boxed{}_6 & \boxed{}_7 & \boxed{}_8 \end{array}$$

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \rightarrow (7x - 3y + 6z, 36x - 14y + 24z, 9x - 3y + 4z).$$

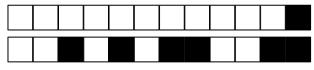
- (a) Calculer le polynôme caractéristique de f et le factoriser.
- (b) f est-elle diagonalisable? Si oui, déterminer une base propre pour f .

- (c) Représenter sur un croquis ci-dessous les sous-espaces propres de f ainsi qu'un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f .

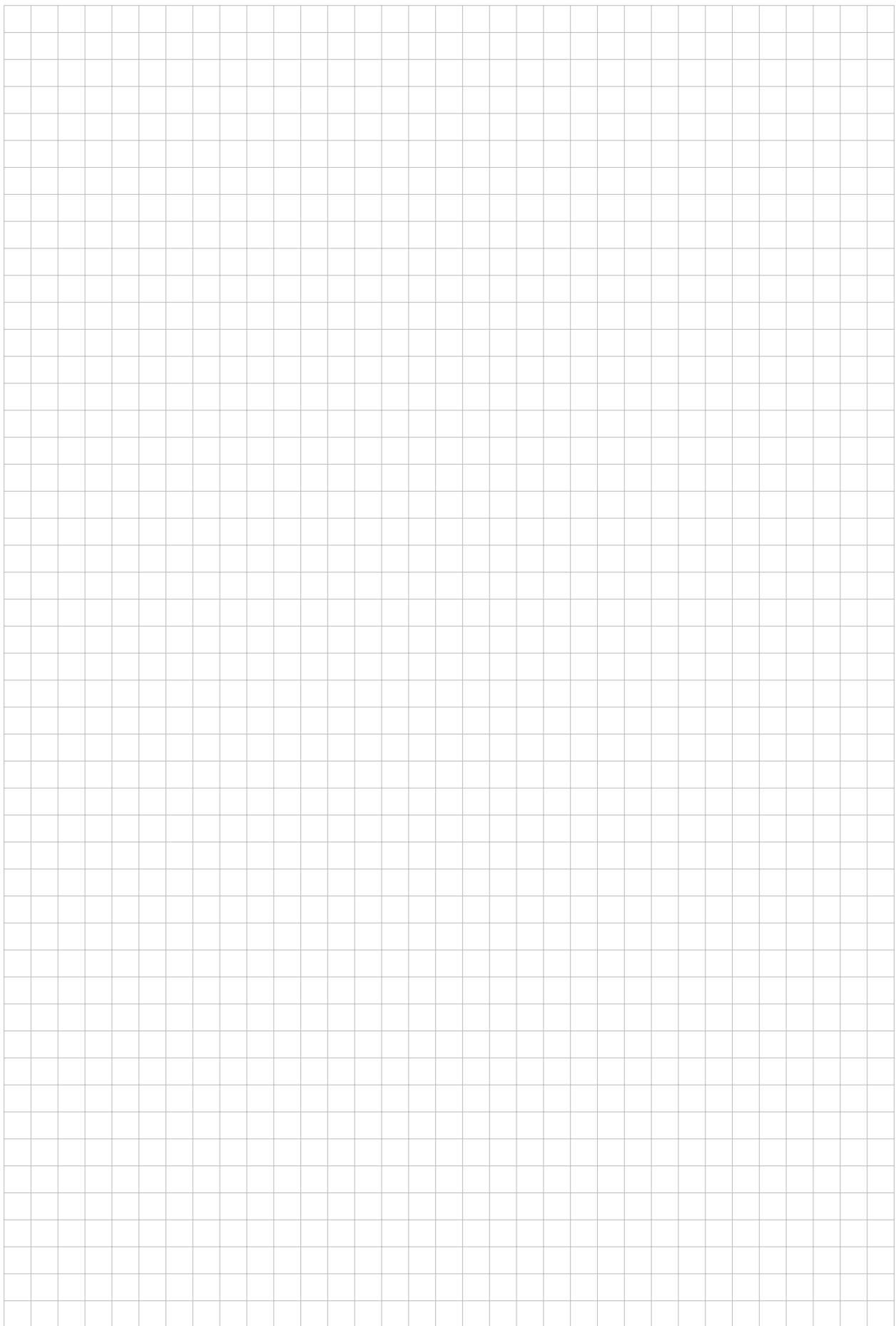


+1/9/52+



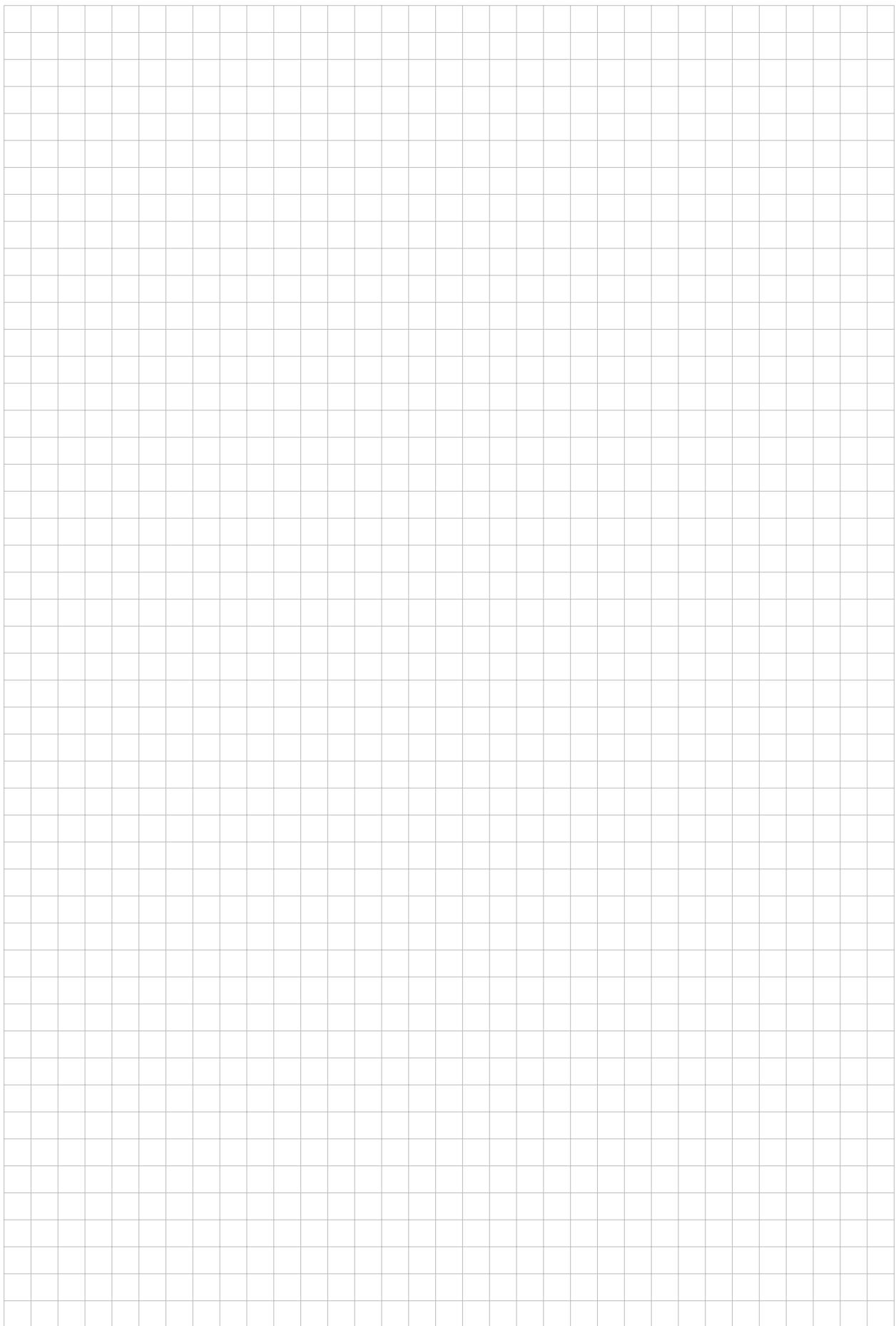


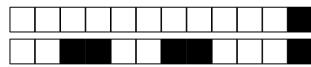
+1/10/51+



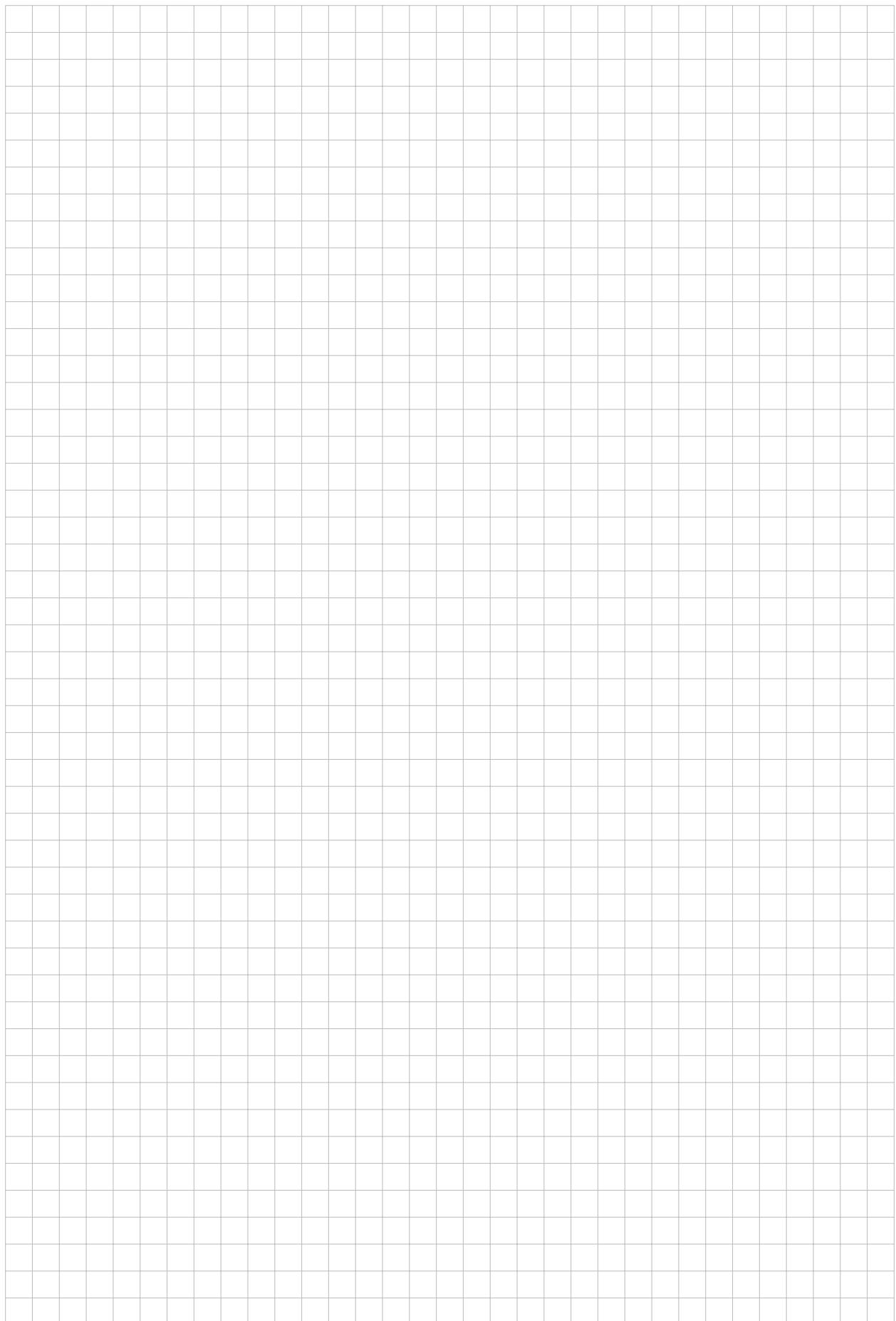


+1/11/50+



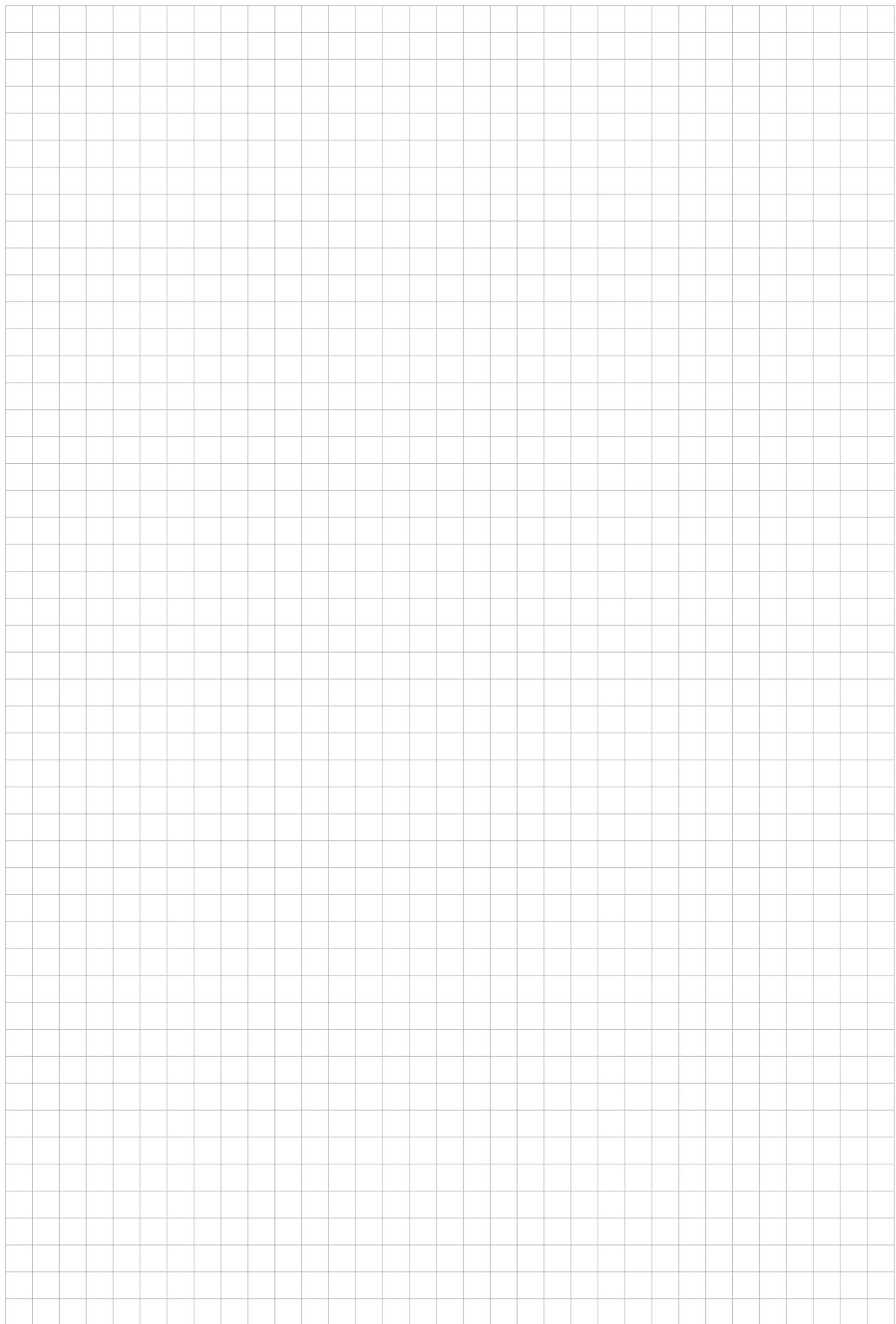


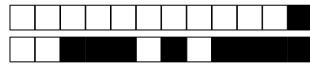
+1/12/49+





+1/13/48+





Question 7: *Cette question est notée sur 3 points.*

<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	
<input type="text"/> 0		<input type="text"/> 1		<input type="text"/> 2		<input type="text"/> 3

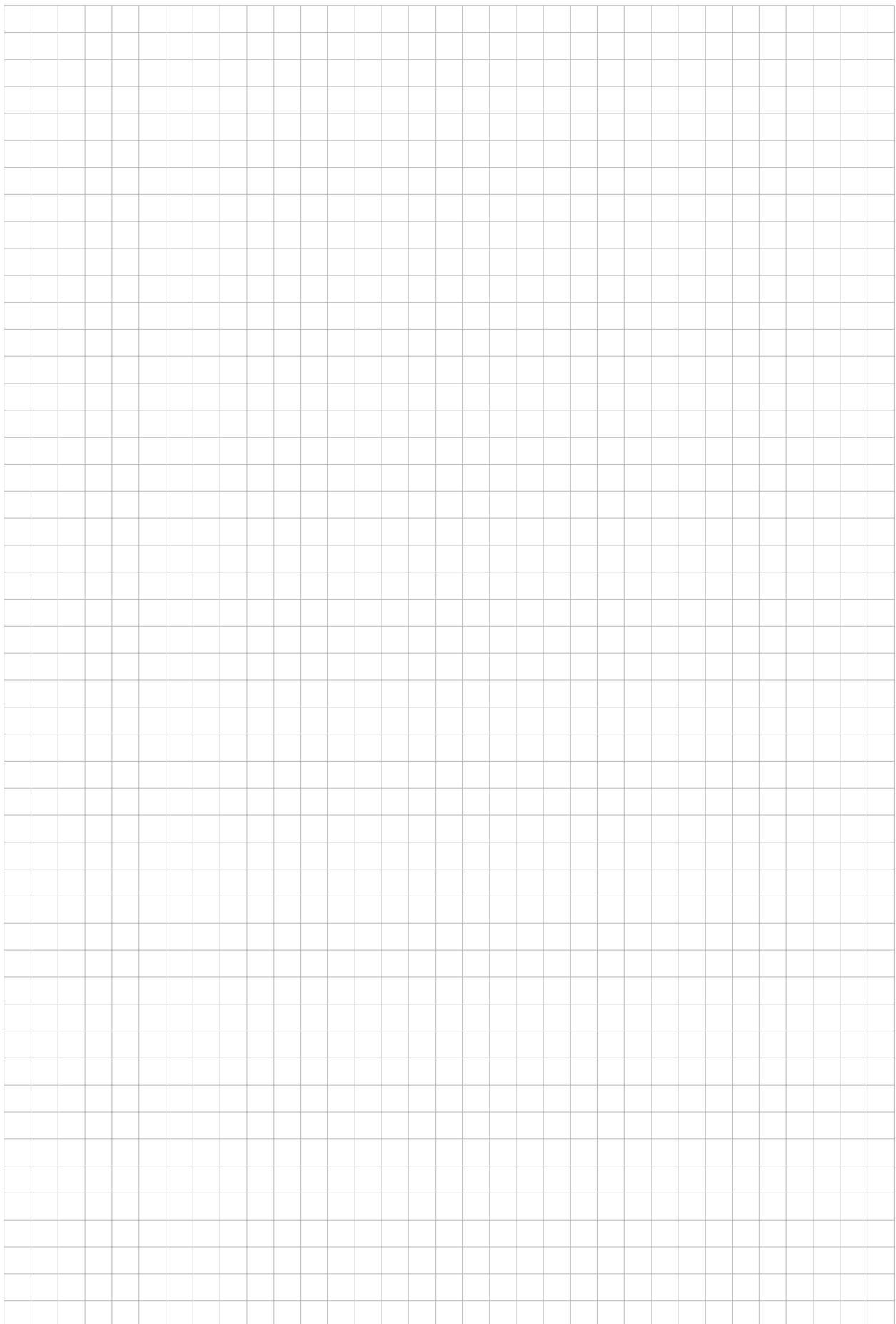
Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur \mathbb{R} on donne :

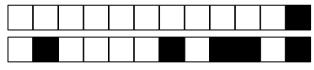
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x^4), \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(4x), \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\sin(x))^4.$$

La famille f, g, h est-elle libre ou liée ? Justifier.



+1/15/46+





+1/16/45+

